Flux state mean filed theory of fractional Hall effect と Hofstadter butterfly [1]

北海道大学大学院理学研究科　石川健三 [2]

1　初めに：量子ホール効果をめぐる物理

量子ホール効果はSIMOSFETやGaAs-GaAlAsヘテロ結合等で実現している2次元電子系が低温かつ強磁場下で示す特異な物理現象である。強磁場下の2次元電子のエネルギーレベルの特徴は、ランダウ準位として知られているように等間隔の厳密に縮退した準位にある。この結果多くの特異で極めて高い普遍性を持つ現象が生ずる。これらは、様々な物理法則や多くの他の物理とも密接な関連を持つ。
整数量子ホール効果ではホール伝導度が電子数（占有率）の変化とともに一定に保たれかつその値が微細構造定数だけで決まる。これよりホール伝導度が抵抗標準や微細構造定数の精密測定に使われる。この現象は不純物のため電子の縮退が一部とけ、不連続なエネルギーを持つ局在状態が生ずることにより起きる。フェルミエネルギーが局在状態内にある時、伝導度の対角成分は消えホール伝導度は一定に保たれ整数量子ホール効果が起きる。フェルミエネルギーが非局在状態内にある時には有限な対角成分と変化するホール成分とが現れる。

電子系に働くクーロン相互作用も縮退を解かせることになる。このとき多体系として縮退のとけた様々な新しい凝縮系が現れる。電子占有率の値により異なる量子状態；エネルギーギャップを持つ非圧縮性量子液体状態、エネルギーギャップを持たない圧縮性量子液体（ガス）状態、量子固体（ウィグナー結晶）等が現れる。量子ホール液体は一体エネルギーが縮退しているため相互作用の効果を極めて大きくうけた、典型的な非フェルミ液体である。これらが、電子占有率の値の変化と共に、複雑な振る舞いをする電気伝導度として観測されている。

一方現実の電子系は有限であるため、縁がある。縁には一方向に運動するカイラル一次元モードがある。ここでは、2次元系と1次元系との両方の物理が現れる。

量子ホール効果と関連してさらに、可解模型、量子群、トポロジー、アノマリー、等の様々な場の理論の非摂動効果が重要な働きをしている。量子ホール系は次にあげる場の量

[1]この原稿は京大基研”量子ホール効果”研究会報告である。

[2]E-mail:ishikawa@particle.sci.hokudai.ac.jp

子論の様々な非摂動効果を見る実験場のようでさえある,

Topics:

QED test(Standard of resistence,SIN unit)

Anderson Localization, Metal-Insulator transition

One dimensional chiral theory, Chern-Simons gauge theory,Composition Fermion

non-Fermi liquid, Laughlin wave function

Solvable model, Bethe Ansatz

Skyrmion

anomaly,topology,non-pertabative physics

strong colleration

2 QED テストと微細構造定数の精密測定

Quantum Electrodynamics (QED) は電子と光とから成る量子多体系を表し、相対論的不変な場の理論として約半世紀前、初めて定式化されたものである。相互作用の大きさを示す微細構造定数αをパラメータとして持ち、摂動論として計算途中で出てくる無限大を 繰り込み理論を使い処置し無矛盾な理論形式を形ずくっている。QEDの正当性は、理論と実験との比較から明らかになる。そのためには、物理量の精密測定や摂動論の高次までの理論計算と共に、微細構造定数の精密な値が必要とされる。代表例が、電子の異常磁気能率である。電子のアノマリー $a = g/2 - 1$ の理論値及び実験値はそれぞれ、

1948 年

theory: $a = \alpha/2\pi = 1.162x10^{-3}$

experiment:$a = 1.18(3)x10^{-3}$

1978 年

theory: $a = \alpha/2\pi - 0.328478445x(\alpha/\pi)^2 + 1.183(11)x(\alpha/\pi)^3 = 1159652359(282)x10^{-12}$

experiment:$a = 1159652410(200)x10^{-12}$ [0.19ppm]

$\alpha^{-1} = 137.035987(29)$[0.21ppm]

1998 年

theory: $a = \alpha/2\pi - 0.328478965x(\alpha/\pi)^2 + 1.17562(56)x(\alpha/\pi)^3 + (-)1.472(152)x(\alpha/\pi)^4 + 4.46x10^{-12} = 1159652359(282)x10^{-12}$

experiment:$a = 1159652188.4(4.3)x10^{-12}$[0.0038ppm]

$\alpha^{-1} = 137.0360037(33)$[0.024ppm]

のような経過をたどって来た。2次の計算は Schwinger によりなされ、近年の高次計算は Kinoshita を中心になされている。この QED の高次計算は現在 8 次以上にまで進んでい、さらに進展中である。また実験では Penning trap の方法で格段に進歩した。

なお微細構造定数の現状の実験値は、

$\alpha^{-1} = 137.0360037(33)[0.024\mathrm{ppm}]$ [QHE]
$\alpha^{-1} = 137.0359770(77)[0.056\mathrm{ppm}]$ [acJosephson]
$\alpha^{-1} = 137.0360108\ (52.4)[0.039\mathrm{ppm}]$ [neutron]
$\alpha^{-1} = 137.03599993(52)[0.0038\mathrm{ppm}]$ [QED からの値]

である。異常磁気能率の実験値、理論値並びに微細構造定数の実験値がそれぞれ影響を及ぼし合いながらより精密なものへと進展してきた。Penning Trap や量子ホール効果等の新しい方法の発見により値が飛躍的に進展してきた様子がよく分かる。現在も、Coulomb blockade 、中性子や原子の干渉実験等の方法が進行している。近い将来さらに精度が上がるかもしれない。この分野での測定精度の一桁の向上は全く新しい未知の世界へ入ってゆく challenging なことを意味する。現在最高位の位置を占めているのは量子ホール効果であるが、これからどうなるのか？ アイデアを生かせる分野でもある。

3 flux state mean filed theory of fractional Hall effect と Hofstadter butterfly

3.1 von Neumann 格子表現

磁場中２次元電子の量子多体問題を調べるのに便利な表現として von Neumann 格子表現がある。電子の座標を、交換関係が純虚数になる二つの座標の組からできているサイクロトロン円運動の中心座標とそれからの相対座標に分離して表す。一体 Hamiltonian は相対座標の二乗に比例する調和振動子のものからなり、中心座標は含まれない。このため、中心座標で表される空間は、縮退を表す。サイクロトロン円運動の中心座標の任意性に対応するこの空間をうまく表現しておくことは、不純物や相互作用のある縮退の解けた系での議論を見通し良くするのに重要である。von Neumann 格子表現では、中心座標からなる coherent 状態の集まりを使う。磁場の平方根に反比例する大きさの格子間隔上に固有値を持つ coherent 状態の集まりは完全系を成し、空間的な平行移動に対する性質も良い。このため、局在状態、非局在状態両方の状態の表現に有効である。この表現で著者達は、整数量子ホール効果の厳密性の証明、ホール伝導度のトポロジー的性質の解明、有限サイズ効果、有限電流効果の解明、周期ポテンシャル系のスペクトル及びその双対性、分数量子ホール効果の flux 凝縮理論等を展開してきた。[1, 2, 3, 4, 6] 詳細は参考文献にゆずることにするが、以下分数量子ホール効果の flux 凝縮理論を簡単に説明する。[4]

3.2 von Neumann 格子上の場の理論

電子場を von Neumann 格子表現の運動量表示で、

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \sum_{l=0}^{\infty} b_l(\mathbf{p}) \langle \mathbf{x}|l,\mathbf{p}\rangle. \tag{1}$$

と展開しその係数を場の演算子とみなす。場の演算子 $b_l(\mathbf{p})$ はランダウ準位の引数を持ち格子から定義したトーラス上の運動量で定義されている。この演算子または適当にユニタリー変換した演算子の propagator よりホール伝導度が、

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{e^2}{h}\frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathrm{BZ}\times S^1} d^3p\epsilon_{\mu\nu\rho} \\ &\quad \mathrm{tr}\left(\partial_\mu \tilde{S}^{-1}(p)\tilde{S}(p)\partial_\nu \tilde{S}^{-1}(p)\tilde{S}(p)\partial_\rho \tilde{S}^{-1}(p)\tilde{S}(p)\right)\end{aligned} \tag{2}$$

と運動量空間のトポロジカル不変量で表される。これは、整数量子ホール効果の厳密性の証明を与えるが、この際、運動量空間のコンパクト性を初め外部磁場が重要な働きをしている。

3.3 von Neumann 格子上の flux state

外部磁場の効果が格子で表わされたが、さらに電子間には相互作用が働いている。相互作用により、外部磁場で決まる長さのスケール（von Neumann 格子間隔）以外のもう一つのスケールを持つ有効磁束の凝縮が起きるとする。その平均場理論を考察する。二つのスケールを持つ周期系はその相対比が（簡単な）有理数か無理数かで物理系の性質は一般に大きく異なる。今の場合も同じことが起きる。隣接間相互作用を持つ格子模型に磁束が与えられた時のエネルギースペクトルが Hofstadter により詳しく調べられた。単位胞当たりの磁束が丁度電子占有率に比例する時、その密度まで電子が積まった多体系は最も大きなエネルギーギャップを持つ。この性質を持つ self-consistent な平均場をもとめることにしよう。外部磁場の影響は von Neumann 格子から作った運動量空間での Hamiltonian に位相因子として残る。これを、Chern-Simons ゲージ理論によって近似的に消去した後の近似的 Hamiltonian が、

$$\begin{aligned} H &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum v(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)c_0^\dagger(\mathbf{R}_1)c_0(\mathbf{R}_2)c_0^\dagger(\mathbf{R}_2)c_0(\mathbf{R}_1), \\ v(\mathbf{R}) &= \tfrac{\pi}{a}e^{-\frac{\pi}{2}\mathbf{R}^2}I_0(\tfrac{\pi}{2}\mathbf{R}^2), \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる。これをまず $\nu = 1/2$, の場合に解き次に 1/2 から僅かにずれた場合で、

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{M}} &= \textstyle\sum U_0^{(\frac{1}{2}+\delta)}(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)e^{i\int(\mathbf{A}^{(\frac{1}{2})}+\delta\mathbf{A})\cdot d\mathbf{x}}v(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2) \\ &\quad c^\dagger(\mathbf{R}_1)c(\mathbf{R}_2), \\ &\quad \langle c^\dagger(\mathbf{R}_1)c(\mathbf{R}_2)\rangle_{1/2+\delta} = U_0^{(\frac{1}{2}+\delta)}e^{i\int(\mathbf{A}^{(\frac{1}{2})}+\delta\mathbf{A})\cdot d\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{4}$$

の形で解く。$\nu = 1/2$ のエネルギーバンドの構造から selfconsistent な平均場は$\nu = \frac{p}{2p\pm1}$で解を持つ。エネルギーギャップは粗い近似を使い次のように与えられる。

$$\Delta E_{\mathrm{gap}} = \frac{e\delta B_{\mathrm{eff}}}{m^*} = \frac{eB_0}{m^*}|\nu - \frac{1}{2}|. \tag{5}$$

、但し有効質量は

$$m^* = 0.225\sqrt{\frac{B}{B_0}}m_e,\ B_0 = 20\mathrm{Tesla},\ \kappa = 13,\ \gamma = 0.914\frac{e^2}{\kappa}. \tag{6}$$

で与えられる。得られた結果は $\nu = 1/3$ で実験値とほぼあう。$\nu = 1/2$ ではギャップが消失するので平均場の回りの揺らぎの効果が大きくなると思われる。実験でもここでは、圧縮性流体（ガス）となっている。この高次効果の計算を進めているところである。

3.4 Hofstadter butterfly

Hofstadter butterfly は隣接間相互作用を持つ格子模型に磁束が与えられた時のエネルギースペクトルであり、[5] 一方分数量子ホール効果は連続系での 2 次元電子系での物理である。両者は本来別の力学系を表しているため無関係であると考えられていた。本稿で述べた通り、両者が実は深いところで関係していることが最近分かってきた。

謝辞

本研究は文部省科学研究費補助金" 国際学術研究（共同研究 10044043）特定領域研究（CP 非保存の物理 10140201)" の援助のもとに、前田展希、落合哲行、鈴木久男氏他の協力のもとになされた仕事の中から一部取り上げたものである。

参考文献

[1] N. Imai, K. Ishikawa, T. Matsuyama and I. Tanaka, Phys. Rev. **B42** (1990), 10610.

[2] K. Ishikawa, Prog. Theor. Phys. Supple. No.107 (1992), 167.

[3] K. Ishikawa, N. Maeda and K. Tadaki, Phys. Rev. **B51** (1995), 5048; **B54** (1996), 17819. K. Ishikawa et al., Phys. Lett. **210A** (1996), 321.

[4] K. Ishikawa and N. Maeda, Prog. Theor. Phys. **97** (1997),507 .

[5] D.R.Hofstadter,Phys.Rev.**B14**,(1976),2239.

[6] K. Ishikawa, N. Maeda,T.Ochiai and H.Suzuki, Phys. Rev. **B58** (1998), 1088 ;ibid, R13391-R13394. ,to appear in Physica E(1998).